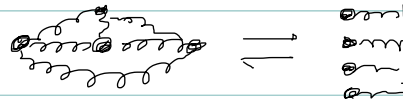


Coordenadas normais



É possível realizar uma mudança de coordenadas de modo a tornar um sistema executando pequenas oscilações formalmente idêntico a uma coleção de n osciladores harmônicos independentes, com frequências ang. $\omega_1 \dots \omega_n$. Em outras palavras, é possível definir novas coordenadas $\zeta_1(\eta) \dots \zeta_n(\eta)$ tais que a lagrangiana de peqs. oscilações assume a forma

$$\mathcal{L}_{po} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\dot{\zeta}^T \mathbb{1} \cdot \dot{\zeta} - \zeta^T D \cdot \zeta \right] \quad \text{onde } D = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$$

↳ (note que $m_k \equiv 1$)

E as eqs. de movimento ficam $\ddot{\zeta}_k = -\omega_k^2 \zeta_k \Rightarrow \zeta_k(t) = c^{(k)} \cos(\omega_k t + \phi_k)$

Para entender como construir ζ_k , relembre que cada condição inicial $\eta(0) \propto p^{(k)}$, onde

$p^{(s)}$ é um vetor ^{característico real} satisfazendo $(V - \omega_k^2 T)p^{(k)} = 0$, evolui precisamente dessa forma.

A ideia é então escolher uma nova base para representar os vetores de configuração do sistema, de tal forma que $p^{(k)} \propto (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T$
 $\uparrow$
 k

Tomemos então um conjunto linearmente independente de vetores característicos com normalizações escolhidas tais que

$$p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(l)} = \delta_{kl}$$

Para ver por que isso pode sempre ser feito, veja primeiro que dado qualquer autovetor $p^{(k)} \neq \vec{0}$, sempre podemos renormalizá-lo de modo que $p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(k)} = 1$ (Isso segue do fato de $\hat{T}$ ser uma matriz estritamente positiva).

Considere agora dois autovetores distintos $p^{(k)}, p^{(l)}$:

iguais, já que $\hat{T}$ (resp. $\hat{V}$) simétrico!

$$\hat{T}^{-1} \hat{V} p^{(l)} = \omega_l^2 p^{(l)} \Rightarrow \begin{cases} \omega_l^2 & p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(l)} = p^{(k)T} \cdot \hat{V} \cdot p^{(l)} \\ \omega_k^2 & p^{(l)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(k)} = p^{(l)T} \cdot \hat{V} \cdot p^{(k)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\omega_l^2 - \omega_k^2) [p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(l)}] = 0$$

Temos então 2 casos a considerar

i) se $\omega_k \neq \omega_l$: $p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(l)} = 0$ automaticamente! Podemos ainda renormalizar cada um desses vetores de modo a satisfazer $p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(k)} = 1$

ii) Se $\omega_k = \omega_l$, dizemos que $p^{(k)}$ e $p^{(l)} \equiv p^{(k')}$ são degenerados. Qualquer combinação linear deles também será um autovetor com autovetor ω_k . Usando essa liberdade é possível construir combinações que satisfazem $p^{(k)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(k')} = \delta_{kk'}$. [processo de ortogonalização de Gram-Schmidt].

Assim, em qualquer caso podemos escolher um conjunto ortonormal de autovetores $p^{(k)}$. Obs: note que esta propriedade simplifica bastante o processo de diagonalização, uma vez que, após já termos encontrado um ou mais $p^{(k)}$'s, os seguintes tem de ser automaticamente ortogonais aos anteriores.

Agora: dada uma base $\{p^{(k)}\}$, defina a matriz $A_{rs} = p_r^{(s)}$, ou seja,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} | & & | \\ p^{(1)} & \dots & p^{(n)} \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{cujas columnas são as coordenadas dos } p^{(k)}, \quad k=1 \dots n.$$

Note que A é a matriz que mapeia $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow p^{(k)}$, ou seja, mapeia a base padrão no conjunto $\{p^{(k)}\}$. Essa matriz é às vezes chamada "matriz modal". Ela satisfaz

$$(\hat{A}^T \hat{T} \hat{A})_{rs} = \sum_{kl} (p_k^{(r)T} T_{kl} p_l^{(s)}) = p^{(r)T} \cdot \hat{T} \cdot p^{(s)} = \delta_{rs} \rightarrow \boxed{A^T T A = I} \Leftrightarrow \boxed{A^{-1} = A^T T}$$

e ainda: $(\hat{V} \hat{A})_{ks} = [\hat{V} p^{(s)}]_k = [\omega_s^2 \hat{T} p^{(s)}]_k = \omega_s^2 \sum_l T_{kl} p_l^{(s)}$

$$\Rightarrow (\hat{A}^T \hat{V} \hat{A})_{rs} = \sum_k (\hat{A}^T)_{rk} (\hat{V} \hat{A})_{ks} = \omega_s^2 \sum_k p_k^{(r)T} T_{kl} p_l^{(s)} \stackrel{\Delta}{=} \omega_s^2 \delta_{rs}$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{A}^T \hat{V} \hat{A} = \hat{D}} \quad \text{onde } \hat{D} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \text{ é diagonal}$$

obs: note que a matriz $\hat{A}$ diagonaliza $\hat{T}$ e $\hat{V}$ simultaneamente

Estamos finalmente prontos para definir as coordenadas normais ζ_k :

Tomamos $\boxed{\zeta \equiv \hat{A}^{-1} \eta = A^T \hat{T} \eta}$ (ie, $\eta = A \zeta$)

Podemos agora reexpressar a Lagrangeana em termos de ζ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{\eta}^T \hat{T} \dot{\eta} - \eta^T \hat{V} \eta] = \frac{1}{2} [\dot{\zeta}^T \hat{A}^T \hat{T} \hat{A} \dot{\zeta} - \zeta^T \hat{A}^T \hat{V} \hat{A} \zeta] = \frac{1}{2} [\dot{\zeta}^T \hat{\zeta} - \zeta^T \hat{D} \zeta]$$

Vemos que esta é a Lagrangeana de um conjunto de n osciladores harmônicos independentes, com frequências ω_i ; $i=1 \dots n$, e massa $m_i \equiv 1$!

Aplicação ao exemplo anterior [pêndulos acoplados].

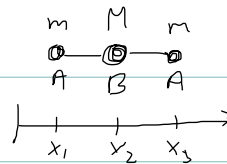
Note 1º que $\rho^{(1)T} \cdot T \cdot \rho^{(2)} = 0$ automaticamente, e impondo $\rho^{(1)T} \cdot T \cdot \rho^{(1)} = 1$ obtemos $\rho^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\rho^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Assim: $A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Sol. geral em coords. normais: $\zeta(t) = \begin{pmatrix} c^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ c^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix}$

ex: se $\eta_1(0) = \dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0$, $\eta_2(0) = a$ $\therefore \begin{cases} \zeta(0) = A^T T \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \\ \dot{\zeta}(0) = A^T T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\Rightarrow c^{(1)} = \frac{m}{2} = -c^{(2)}$; $\phi_1 = \phi_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\eta(t) = \frac{1}{2} a \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \\ \cos \omega_2 t + \cos \omega_1 t \end{pmatrix}}$

Exemplo: molécula triatômica linear simétrica:



Como cada "mola" é idêntica, a config. de equilíbrio satisfaz

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = l$$

Tomando a pos. de eq. de B como 0, e def: $\begin{cases} \eta_1 = x_1 + l \\ \eta_2 = x_2 \\ \eta_3 = x_3 - l \end{cases}$

$$\therefore V = \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - l)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 = \frac{1}{2}k[(\eta_3 - \eta_2)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2]$$

$$\rightarrow \hat{V} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; T = \frac{1}{2} [m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + M\dot{\eta}_2^2] \rightarrow \hat{T} = \begin{bmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{bmatrix}$$

$$\text{eq. característica: } \begin{vmatrix} k - m\lambda & -k & 0 \\ -k & 2k - M\lambda & -k \\ 0 & -k & k - m\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (k - m\lambda) [(2k - M\lambda)(k - m\lambda) - k^2] - k^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{k}{m} \text{ ou } mM\lambda^2 - k(2m + M)\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k - M\lambda & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} p^{(1)} = 0 \rightarrow p^{(1)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \text{molécula se move como um todo, com vel. constante.} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2 - \frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} p^{(2)} = 0 \rightarrow p^{(2)} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \text{modo "respiro"} \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{2mk}{M} & -k & 0 \\ -k & -k\frac{M}{m} & -k \\ 0 & -k & -\frac{2mk}{M} \end{bmatrix} p^{(3)} = 0 \rightarrow p^{(3)} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \text{modo "zig zag"} \end{array} \right.$$

normalização: impondo $1 = \alpha_i^2 p^{(i)T} T \cdot p^{(i)}$, vem:

$$\alpha_1^2 \cdot (2m+M) = 1 \rightarrow p^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2^2 \cdot (2m) = 1 \rightarrow p^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3^2 \cdot \left(2m + \frac{4m^2}{M}\right) = 1 \rightarrow p^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2m(1 + \frac{2m}{M})}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ortogonalidade é satisfeita automaticamente, dado que $\omega_i \neq \omega_j$

Matriz modal: $A = \frac{1}{\sqrt{2m(2m+M)}} \begin{bmatrix} \sqrt{2m} & -\sqrt{2m+M} & \sqrt{M} \\ \sqrt{2m} & 0 & -\frac{2m}{\sqrt{M}} \\ \sqrt{2m} & \sqrt{2m+M} & \sqrt{M} \end{bmatrix}$

Coordenadas normais:

$$\zeta = A^T T \eta = \frac{1}{\sqrt{2m(2m+M)}} \begin{bmatrix} \sqrt{2m} & \sqrt{2m} & \sqrt{2m} \\ -\sqrt{2m+M} & 0 & \sqrt{2m+M} \\ \sqrt{M} & -\frac{2m}{\sqrt{M}} & \sqrt{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \zeta_1 = \frac{m(\eta_1 + \eta_3) + M\eta_2}{\sqrt{2m+M}} = \sqrt{2m+M} x_{CM} \quad ; \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} (\eta_3 - \eta_1) = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_3 - x_1 - 2l)$$

$$\zeta_3 = \sqrt{\frac{mM}{2(2m+M)}} [\eta_1 + \eta_3 - 2\eta_2]$$